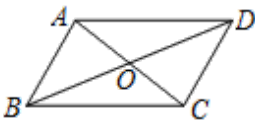


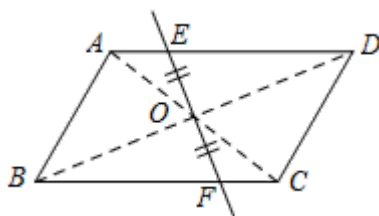
第1讲 平行四边形

一、平行四边形的性质

	定义	_____的四边形叫做平行四边形．平行四边形用_____表示，平行四边形 $ABCD$ 记作_____．
	性质	平行四边形的_____． 书写：
		平行四边形的_____． 书写：
		平行四边形的_____． 书写：

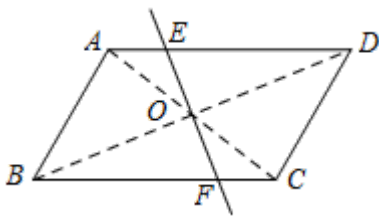
重要结论：

(1) 若一条直线经过平行四边形对角线的交点，则这条直线被一组对边截得的线段以对角线的交点为中点．如图，直线 EF 经过平行四边形对角线的交点 O ，分别交一组对边于 E 、 F ．即_____．



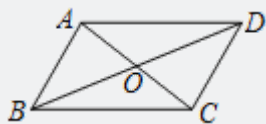
(2) 若一条直线经过平行四边形对角线的交点，则这条直线平分平行四边形的_____和_____．如图，直线 EF 经过平行四边形对角线的交点 O ，分别交一组对边于 E 、 F ．即 EF 平分平行四边形的

_____，_____．



【教法备注】

1、平行四边形的定义：两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形．



平行四边形用“ $\square$ ”表示，平行四边形 $ABCD$ 记作“ $\square ABCD$ ”．

注意：

①对边：四边形中不相邻的边，也就是没有公共顶点的边叫做对边．

②对角：四边形中没有公共边的两个角，也就是说对着的两个角叫做对角．

③平行四边形的表示要按照一定的方向依次表示各个顶点．可以按照顺时针方向排列字母顺序，也可按照逆时针方向排列字母顺序，但是不能打乱顺序．

2、平行四边形性质：

图形	性质		符号表示
平行四边形 $ABCD$ 	边	平行四边形的对边平行 平行四边形的对边相等	$AB \parallel CD, AD \parallel BC$ $AB = CD,$ $AD = BC$
	角	平行四边形的对角相等 邻角互补	$\angle DAB = \angle BCD,$ $\angle ABC = \angle ADC$ $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$
	对角线	平行四边形的对角线互相平分	$OA = OC = \frac{1}{2}AC,$ $OB = OD = \frac{1}{2}BD$

书写： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC,$$

$$AB = CD, AD = BC,$$

$$\angle DAB = \angle BCD, \angle ABC = \angle ADC,$$

$$OA = OC = \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD.$$

注意：

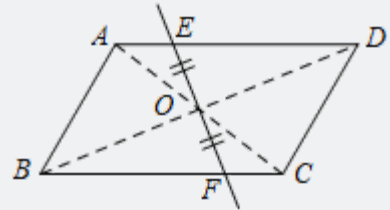
①做题时根据实际需要，只写出需要的性质即可．

②平行四边形属于四边形，它具有四边形的性质，平行四边形的内角和 360° ，外角和也是 360° ．

3、重要结论：

(1) 若一条直线经过平行四边形对角线的交点，则这条直线被一组对边截得的线段以对角线的交点为中点．如图，直线 EF 经过平行四边形对角线的交点 O ，分别交一组对边于 E 、 F ．即 $OE = OF$ ．

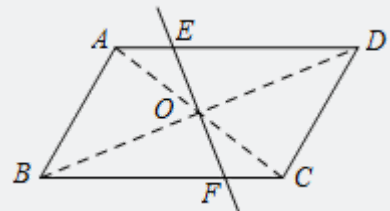
通过证明 $\triangle AEO \cong \triangle CFO$ 即可．



(2) 若一条直线经过平行四边形对角线的交点, 则这条直线平分平行四边形的周长和面积.

如图, 直线 EF 经过平行四边形对角线的交点 O , 分别交一组对边于 E 、 F .

即 EF 平分平行四边形的周长和面积, $C_{\text{四边形}ABFE} = C_{\text{四边形}CDEF}$, $S_{\text{四边形}ABFE} = S_{\text{四边形}CDEF}$.



|| 例题

1. 平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle A$ 和 $\angle C$ 的和为 100° , 那么 $\angle B = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.

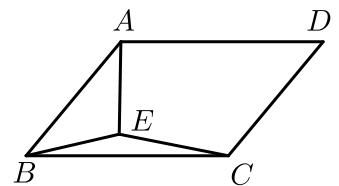
【答案】 130

【解析】 $\angle B$ 与 $\angle D$ 和为 $360 - 100 = 260^\circ$, $\angle B$ 为 130° .

故答案为: 130.

【标注】【知识点】根据平行四边形角的性质计算与证明

2. 如图, E 为平行四边形 $ABCD$ 内一点, 且 $EA = EB = EC$, 若 $\angle D = 50^\circ$, 则 $\angle AEC$ 的度数为 () .



A. 90°

B. 95°

C. 100°

D. 110°

【答案】 C

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle ABC = \angle D = 50^\circ,$$

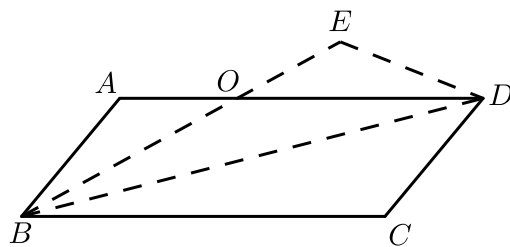
$$\because EA = EB = EC,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA, \angle EBC = \angle ECB,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \angle EAB + \angle ECB &= \angle EBA + \angle EBC = \angle ABC = 50^\circ, \\
 \therefore \angle AEB + \angle BEC &= (180^\circ - \angle EAB - \angle EBA) + (180^\circ - \angle EBC - \angle ECB) \\
 &= 360^\circ - (\angle EAB + \angle ECB + \angle EBA + \angle EBC) \\
 &= 360^\circ - 100^\circ \\
 &= 260^\circ, \\
 \therefore \angle AEC &= 360^\circ - \angle AEB - \angle BEC = 100^\circ, \\
 \text{故选C.}
 \end{aligned}$$

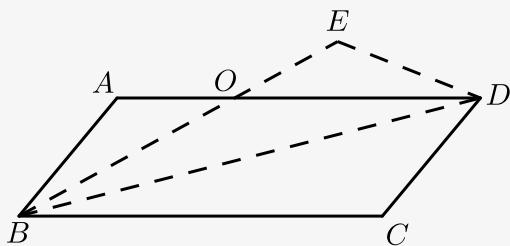
【标注】【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

3. 如图，把一张四边形纸片 $ABCD$ 沿 BD 对折，使 C 点落在 E 处， BE 与 AD 相交于点 O ，若 $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle DBC = 15^\circ$ ，则 $\angle BOD =$ _____ 度。



【答案】150

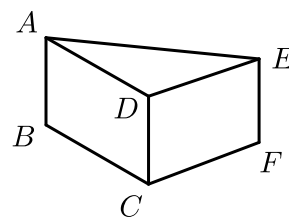
【解析】如图，



$$\begin{aligned}
 \therefore \text{在平行四边形} ABCD \text{中, } AD &\parallel BC, \\
 \therefore \angle ODB &= \angle DBC = 15^\circ \\
 \text{又由折叠的性质知, } \angle EBD &= \angle CBD = 15^\circ, \\
 \text{即} \angle OBD &= 15^\circ, \\
 \therefore \text{在} \triangle OBD \text{中,} \\
 \angle BOD &= 180^\circ - \angle OBD - \angle ODB = 150^\circ.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平行四边形性质综合应用

4. 如图，平行四边形 $ABCD$ 与平行四边形 $DCFE$ 的周长相等，且 $\angle BAD = 60^\circ$ ， $\angle F = 110^\circ$ ，则 $\angle DAE$ 的度数为（ ）。



- A. 20° B. 25° C. 30° D. 35°

【答案】 B

【解析】 $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 与平行四边形 $DCFE$ 的周长相等，

$$\therefore AB + AD = CD + DE.$$

$$\because AB = CD,$$

$$\therefore AD = DE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DEA.$$

由平行四边形的性质， $\angle ADC = 180^\circ - \angle BAD = 120^\circ$ ，

$$\angle CDE = \angle F = 110^\circ,$$

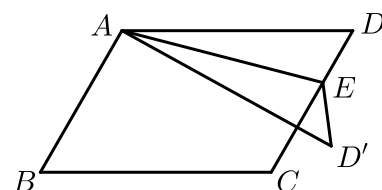
$$\therefore \angle ADE = 360^\circ - 120^\circ - 110^\circ = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ.$$

故选B.

【标注】 【知识点】 根据平行四边形角的性质计算与证明

5. 如图，点 E 为平行四边形 $ABCD$ 中 CD 边上一点，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠至 $\triangle AD'E$ 处， $\angle B = 55^\circ$ ， $\angle DAE = 20^\circ$ ，则 $\angle CED'$ 的大小为 _____。



【答案】 30°

【解析】 $\because \angle DAE = 20^\circ$ ， $\angle B = 55^\circ$ 。

$$\therefore \angle D = 55^\circ, \angle D'AE = 20^\circ.$$

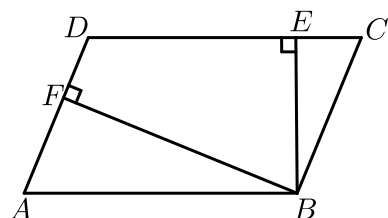
$$\therefore \angle AEC = 75^\circ, \angle AED = 105^\circ = \angle AED'.$$

$$\therefore \angle CED' = 105^\circ - 75^\circ = 30^\circ .$$

【标注】【知识点】根据平行四边形角的性质计算与证明

|| 例题

6. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中， $BE \perp CD$ 于 E ， $BF \perp AD$ 于点 F ， $CE = 2$ ， $DF = 1$ ， $\angle EBF = 60^\circ$ 则平行四边形 $ABCD$ 的面积为 _____ .



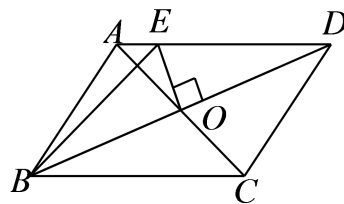
【答案】 $12\sqrt{3}$

【解析】由于 $\angle EBF = 60^\circ$ 且 $BE \perp CD$ ，则 $\angle ABF = 30^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle EBC = 30^\circ$ ，又有 $CE = 2$ ，可得 $CB = 4$ 。又由 $DF = 1$ ，可得 $BF = 3\sqrt{3}$ ，则平行四边形的面积为： $4 \times 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ 。

【标注】【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

|| 练习

7. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的周长为20cm，对角线相交于点 O ，且 $EO \perp BD$ 于点 O ，交 AD 于 E ，则 $\triangle ABE$ 的周长为 _____ cm。



【答案】10

【解析】 $\because AC, BD$ 相交于点 O ，
 $\therefore O$ 为 BD 的中点，
 $\because OE \perp BD$ ，
 $\therefore BE = DE$ ，

$$\triangle ABE \text{的周长} = AB + AE + BE = AB + AD = \frac{1}{2} \times 20 = 10(\text{cm}) .$$

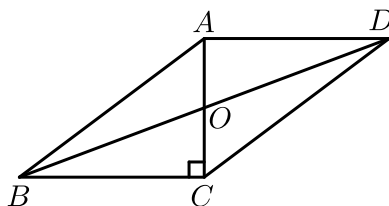
【标注】【知识点】利用平行四边形对角线的性质计算与证明

【重点强调】

2017~2018学年天津河西区天津市第四中学初二下学期单元测试《平行四边形和矩形》第11题

|| 例题

8. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $AB = 10$ ， $AD = 8$ ， $AC \perp BC$ ，对角线 BD 的长是 _____ .



【答案】 $2\sqrt{73}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AD = BC = 8 ,$$

AC 和 BD 互相平分，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} ,$$

$$= \sqrt{100 - 64} = 6 ,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AC = 3 ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中，

$$OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} ,$$

$$= \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73} ,$$

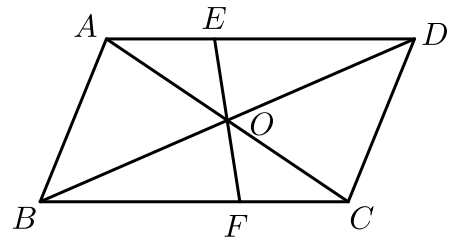
$$\therefore BD = 2\sqrt{73} .$$

【标注】【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

【重点强调】

2017年天津北辰区初三一模第17题3分

9. 如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中， EF 过对角线的交点，若 $AB = 4$ ， $BC = 7$ ， $OE = 3$ ，则四边形 $EFCD$ 的周长是 _____ .



【答案】 17

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, OA = OC, CD = AB = 4, AD = BC = 7$$

$$\therefore \angle EAO = \angle FCO,$$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$$\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO \\ OA = OC \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AE = CF, OE = OF = 3,$$

$$\therefore EF = 6,$$

$\therefore$ 四边形 $EFCD$ 的周长是：

$$\begin{aligned} CD + DE + EF + CF &= CD + DE + AE + EF \\ &= CD + AD + EF \\ &= 4 + 7 + 6 \\ &= 17. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】全等三角形的性质；平行四边形性质综合应用

练习

10. 平行四边形 $ABCD$ 的周长是 28cm ， AC 与 BD 相交于点 O ， $\triangle AOB$ 的周长比 $\triangle OBC$ 的周长大 4cm ，那么 AB 等于（ ）。

- A. 8cm B. 9cm C. 10cm D. 11cm

【答案】 B

【解析】 $\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$$\therefore OA = OC, OB = OD,$$

$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长是 28cm ，

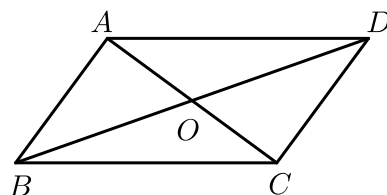
$$\therefore AB = CD, AD = BC,$$

$$\begin{aligned}\therefore AB + BC + CD + AD &= 2(AB + BC) = 28\text{cm}, \\ \therefore AB + BC &= 14\text{cm}, \\ \therefore \triangle AOB \text{的周长比} \triangle OBC \text{的周长大} &4\text{cm}, \\ \therefore AB + OA + OB - (BC + OB + OC) &= AB - BC = 4\text{cm}, \\ \therefore AB &= 9\text{cm}.\end{aligned}$$

故选：B.

【标注】【知识点】利用平行四边形对角线的性质计算与证明

11. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AB \perp AC$ ，若 $AC = 8$ ， $\angle BOC = 120^\circ$ ，则 BD 的长是 _____ .



【答案】 16

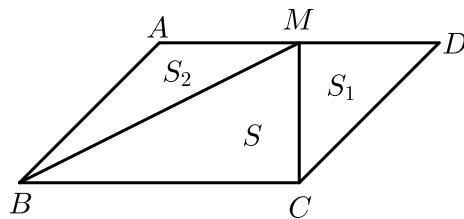
【解析】 $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，
 $\therefore BO = DO$ ， $AO = CO = \frac{1}{2}AC = 4$ ，
 $\because \angle BOC = 120^\circ$ ，
 $\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，
 $\because AB \perp AC$ ，
 $\therefore \angle BAO = 90^\circ$ ， $\angle ABO = 30^\circ$ ，
 $\therefore OB = 2AO = 2 \times 4 = 8$ ，
 $\therefore BD = 2OB = 2 \times 8 = 16$.

故答案为：16 .

【标注】【知识点】利用平行四边形对角线的性质计算与证明

|| 例题

12. 如图所示， M 是 $\square ABCD$ 的边 AD 上任意一点，若 $\triangle CMB$ 的面积为 S ， $\triangle CDM$ 的面积为 S_1 ， $\triangle ABM$ 的面积为 S_2 ，则下列 S ， S_1 ， S_2 的大小关系中正确的是（ ）



A. $S > S_1 + S_2$

B. $S = S_1 + S_2$

C. $S < S_1 + S_2$

D. S 与 $S_1 + S_2$ 的大小关系无法确定

【答案】 B

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC,$$

$\therefore \triangle CMB$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} BC \cdot \text{高}$ ， $\triangle CDM$ 的面积为 $S_1 = \frac{1}{2} MD \cdot \text{高}$ ， $\triangle ABM$ 的面积为 $S_2 = \frac{1}{2} AM \cdot \text{高}$ ，

而它们的高都是等于平行四边形的高，

$$\therefore S_1 + S_2 = \frac{1}{2} MD \cdot \text{高} + \frac{1}{2} AM \cdot \text{高} = \frac{1}{2} (MD + AM) \cdot \text{高} = \frac{1}{2} AD \cdot \text{高} = \frac{1}{2} BC \cdot \text{高} = S$$

，

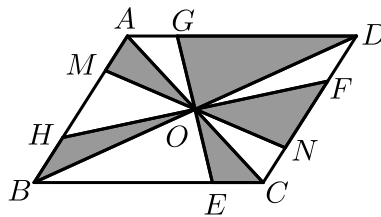
则 S, S_1, S_2 的大小关系是 $S = S_1 + S_2$ 。

故选 B。

【标注】 【知识点】 平行四边形的周长与面积

练习

13. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 的面积为 56，则图中阴影部分的面积是 _____。



【答案】 28

【标注】 【知识点】 中心对称等分平行四边形面积

例题

14.

在平行四边形 $ABCD$ 中， BC 边上的高为4， $AB = 5$ ， $AC = 2\sqrt{5}$ ，则平行四边形 $ABCD$ 的周长等于_____。

A. 12

B. 20

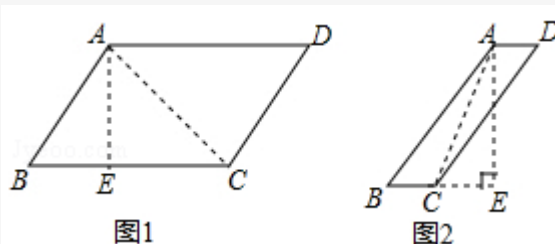
C. 12或20

D. 6或10

【答案】C

【解析】如图1所示：

$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中， BC 边上的高为4， $AB = 5$ ， $AC = 2\sqrt{5}$ ，
 $\therefore EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = 2$ ， $AB = CD = 5$ ， $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 3$ ，
 $\therefore AD = BC = 5$ ，
 $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长等于：20，



如图2所示：

$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中， BC 边上的高为4， $AB = 5$ ， $AC = 2\sqrt{5}$ ，
 $\therefore EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = 2$ ， $AB = CD = 5$ ， $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 3$ ，
 $\therefore BC = 3 - 2 = 1$ ，
 $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长等于：1 + 1 + 5 + 5 = 12，
 则平行四边形 $ABCD$ 的周长等于12或20。
 故答案为12或20。

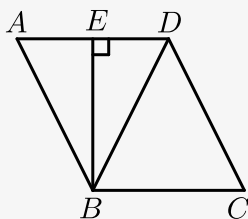
【标注】【知识点】根据平行四边形边的性质计算与证明

练习

15. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = BD$ ， $BE \perp AD$ 于 E ， $\angle DBE = 20^\circ$ ，则 $\angle BAD$ 的度数为_____。

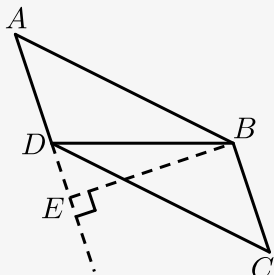
【答案】 55° 或 35°

【解析】情形一：当 E 点在线段 AD 上时，如图所示，



$\because BE$ 是 AD 边上的高, $\angle DBE = 20^\circ$,
 $\therefore \angle ADB = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$,
 $\because AD = BD$,
 $\therefore \angle A = \angle ABD = (180^\circ - 70^\circ) \div 2 = 55^\circ$.

情形二: 当 E 点在 AD 的延长线上时, 如图所示,

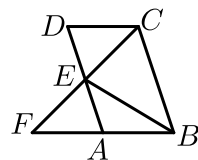


$\because BE$ 是 AD 边上的高, $\angle EBD = 20^\circ$,
 $\therefore \angle BDE = 70^\circ$,
 $\because AD = BD$,
 $\therefore \angle A = \angle ABD = \frac{1}{2} \angle BDE = 35^\circ$.

【标注】【知识点】利用平行四边形对角线的性质计算与证明

例题

16. 如图所示, 在平行四边形 $ABCD$ 中, CE 交 BA 的延长线于 F .



- (1) 若 CE 平分 $\angle BCD$, 证明: $BC = BF$.
 (2) 若 E 为 AD 中点, 证明: $AF = AB$.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because CE$ 平分 $\angle BCD$,

$$\therefore \angle ECD = \angle FCB,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle FCD = \angle BFC,$$

$$\therefore \angle FCB = \angle BFC,$$

$$\therefore BC = BF .$$

(2) $\because E$ 为 AD 中点 ,

$$\therefore DE = AE ,$$

在 $\triangle DEC$ 与 $\triangle AEF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle FCD = \angle BFC \\ \angle CED = \angle FEA , \\ DE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEC \cong \triangle AEF (AAS) ,$

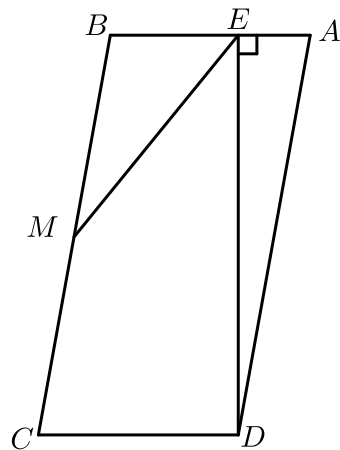
$$\therefore AF = AB .$$

【标注】【知识点】根据平行四边形角的性质计算与证明

练习

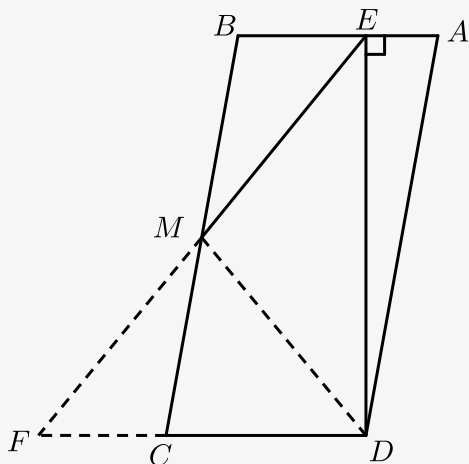
17. 如图所示, 平行四边形 $ABCD$ 中, $DE \perp AB$ 于 E , $BM = MC = DC$. 求证:

$$\angle EMC = 3\angle BEM .$$



【答案】证明见解析 .

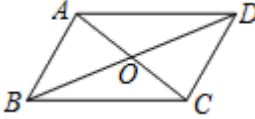
【解析】联结 MD , 分别延长 EM 、 DC 相交于点 F ,



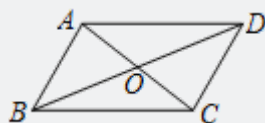
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle F = \angle BEM$, $\angle FCM = \angle B$,
 $\because CM = BM$, $\therefore \triangle MCF \cong \triangle MBE$,
 $\therefore MF = ME$, 即点 M 是 EF 的中点,
 $\because AB \parallel CD$, $DE \perp AB$, $\therefore \angle EDF = 90^\circ$,
 $\therefore MD = \frac{1}{2}EF = MF$, $\therefore \angle F = \angle MDC$,
 $\because MC = CD$, $\therefore \angle MDC = \angle CMD$, $\angle MCF = \angle MDC + \angle CMD = 2\angle F$;
 $\therefore \angle EMC = \angle F + \angle MCF = 3\angle F = 3\angle BEM$.

【标注】【知识点】平行四边形与全等综合

二、 平行四边形的判定

	与边有关的判定	_____分别_____的四边形是平行四边形. 书写：
		_____分别_____的四边形是平行四边形. 书写：
		_____的四边形是平行四边形. 书写:
	与角有关的判定	_____分别_____的四边形是平行四边形. 书写：
	与对角线有关的判定	对角线_____的四边形是平行四边形. 书写：

【教法备注】



1、与边有关的判定：

(1) 两组对边分别平行的四边形是平行四边形 .

书写： $\because AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

(2) 两组对边分别相等的四边形是平行四边形 .

书写： $\because AB = CD, AD = BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

(3) 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形 .

书写： $\because AB \parallel CD, AB = CD,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .

注意： 一组对边平行，另一组对边相等的四边形不一定是平行四边形，可能是等腰梯形 .

2、与角有关的判定：

两组对角分别相等的四边形是平行四边形 .

注意：

一组对边平行，一组对角相等的四边形是平行四边形 .

如图： $AB \parallel CD$ ， $\angle B = \angle D$ ，则四边形 $ABCD$ 为平行四边形 .

$\therefore AB \parallel CD$,

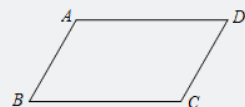
$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$.

$\therefore \angle B = \angle D$,

$\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$.

由定义可知，四边形 $ABCD$ 为平行四边形 .

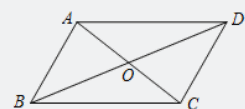


3、与对角线有关的判定：

对角线互相平分的四边形是平行四边形 .

书写： $\therefore OA = OC$ ， $OB = OD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 .



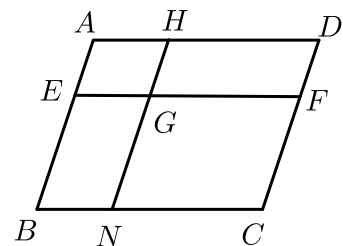
总结：

平行四边形知识的运用包括三个方面：

- ① 直接运用平行四边形的性质求角的度数或线段的长度，证明角相等或互补，证明线段相等或倍分等 .
- ② 先判定一个四边形是平行四边形，从而判定直线平行等 .
- ③ 先判定一个四边形是平行四边形，然后运用平行四边形的性质解决某些问题 .

|| 例题

18. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $EF \parallel AD$ ， $HN \parallel AB$ ，则图中的平行四边形共有 () .



A. 12个

B. 9个

C. 7个

D. 5个

【答案】 B

【解析】 根据平行四边形的定义知，平行四边形有 $AEGH$ 、 $EBNG$ 、 $HGFD$ 、 $GNCF$ 、 $ABNH$ 、 $HNCD$ 、 $AEFD$ 、 $EBCF$ 、 $ABCD$ ，共9个，故选B．

【标注】 【能力】推理论证能力

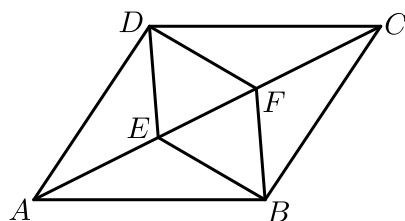
【知识点】平行四边形的定义

【知识点】平行四边形性质综合应用

【重点强调】

2017~2018学年3月天津河北区木斋中学初二下学期月考第10题3分

19. 如图， E 、 F 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的两点， $AE = CF$ ．求证：四边形 $DEBF$ 是平行四边形．



【答案】 证明见解析．

【解析】 连接 BD ，交 AC 于点 O ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

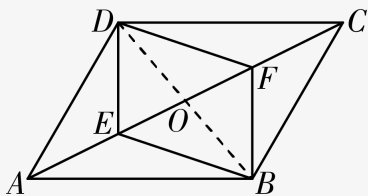
$\therefore OA = OC, OB = OD$ ，

$\because AE = CF$ ，

$\therefore OA - AE = OC - CF$

即 $OE = OF$ ，

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形．

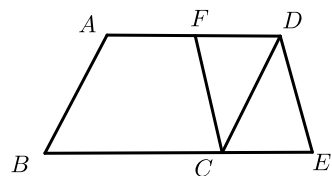


【标注】 【知识点】平行四边形的判定及应用

【能力】推理论证能力

【重点强调】

20. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， F 是 AD 的中点，延长 BC 到点 E ，使 $CE = \frac{1}{2}BC$ ，连接 DE ， CF 。



- (1) 求证：四边形 $CEDF$ 是平行四边形。
 (2) 若 $AB = 4$ ， $AD = 6$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，求 DE 的长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $DE = \sqrt{13}$ 。

【解析】 (1) 在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，

$\because F$ 是 AD 中点。

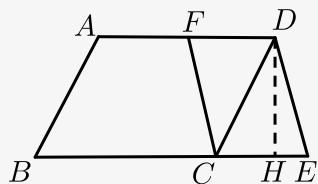
$$\therefore DF = \frac{1}{2}AD.$$

$$\text{又} \because CE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DF = CE \text{ 且 } DF \parallel CE,$$

$\therefore$ 四边形 $CEDF$ 为平行四边形。

- (2) 如图，过点 D 作 $DH \perp BE$ 于点 H 。



在平行四边形 $ABCD$ 中，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle B = \angle DCE,$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 60^\circ.$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore CD = AB = 4,$$

$$\therefore \angle DCE = 60^\circ.$$

$$\therefore CH = \frac{1}{2}CD = 2, DH = 2\sqrt{3}.$$

在平行四边形 $CEDF$ 中， $CE = DF = \frac{1}{2}AD = 3$ ，则 $EH = 1$ 。

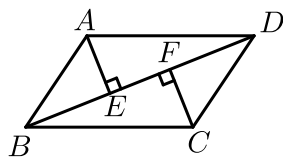
$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle DHE$ 中, 根据勾股定理知 $DE = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{13}$.

【标注】【知识点】平行四边形的判定-与边有关

【重点强调】

2017~2018学年天津河东区初二下学期期中第三学区第22题

21. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, $AE \perp BD$ 于点 E , $CF \perp BD$ 于点 F , 连接 AF 、 CE .



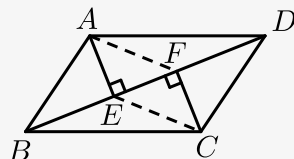
(1) 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

(2) 若 $AB = 6$, $AD = 2\sqrt{21}$, $\angle ABD = 30^\circ$, 求四边形 $AECF$ 的面积.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $6\sqrt{3}$.

【解析】 (1) 连接 AF 、 EC .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB = CD$, $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABE = \angle CDF$,

$\because AE \perp BD$, $CF \perp BD$,

$\therefore AE \parallel CF$, $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$,

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CFD$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle CDF \\ \angle AEB = \angle CFD \\ AB = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle CFD (\text{AAS})$.

$\therefore AE = CF$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\because AB = 6$, $\angle ABE = 30^\circ$,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 3, BE = \sqrt{3}AE = 3\sqrt{3},$$

$$\text{在}\text{Rt}\triangle ADE\text{中}, DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 5\sqrt{3},$$

$\because \triangle AEB \cong \triangle CFD$,

$$\therefore BE = DF = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore EF = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形}AECF} = 2 \cdot S_{\triangle AEF} = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】平行四边形的判定及应用

【知识点】平行四边形性质综合应用

【知识点】勾股定理

【知识点】勾股定理的综合应用

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】AAS

【思想】数形结合思想

【能力】推理论证能力

【能力】分析和解决问题能力

【重点强调】

2018~2019学年3月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第21题8分

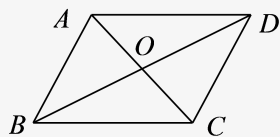
练习

22. 四边形 $ABCD$ 中对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，给出下列四个条件：① $AD \parallel BC$ ；② $AD = BC$ ；③ $OA = OC$ ；④ $OB = OD$ ，从中任选两个条件，能使四边形 $ABCD$ 是平行四边形的选法有（ ）。
- A. 3种 B. 4种 C. 5种 D. 6种

【答案】B

【解析】由平行四边形的判定可知，

$\therefore$ 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，



故①②可判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle DBC$ ，

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 中，

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle DBC \\ \angle AOD = \angle COB, \\ OA = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB (\text{AAS})$,

$\therefore AD = BC$,

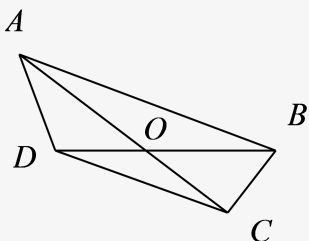
$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

故①②可以判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

同理①④也可以判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

如图:



$AD = BC$, $OA = OC$, 四边形 $ABCD$ 不是平行四边形,

故②③, ②④不可以判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 对角线互相平分的四边形是平行四边形,

$\therefore$ ③④可以判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

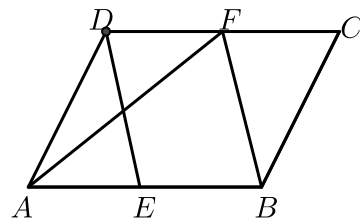
综上, 可以判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的有: ①②, ①③, ①④, ③④, 共4种.

【标注】【知识点】平行四边形的判定及应用

【重点强调】

2017~2018学年天津天津开发区第一中学初二下学期期中第10题3分

23. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, DC 上的点, 且 $AE = CF$, 连接 DE, BF, AF .



(1) 求证: 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

(2) 若 AF 平分 $\angle DAB$, $AE = 3$, $DE = 4$, $BE = 5$, 求 AF 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $4\sqrt{5}$.

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 ,

$$\therefore AB \parallel DC, AB = DC,$$

$$\text{又} \because AE = CF,$$

$$\therefore BE = AB - AE, DF = DC - CF,$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\text{又} \because BE \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 为平行四边形 .

(2) 由题得 :

$$\because AF \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle FAB,$$

$$\text{又} \because DC \parallel AB,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle DFA,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle DFA,$$

$$\therefore AD = DF,$$

由①可知 : 四边形 $DEBF$ 为平行四边形 ,

$$\therefore EB = DF = 5,$$

$$\therefore AD = 5,$$

$$\because AE = 3, DE = 4,$$

$$\therefore AB = AE + BE = 8,$$

$$\therefore AD^2 = DE^2 + AE^2,$$

$$\therefore \angle AED \text{ 为直角 },$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because DE = BF = 4,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中 :

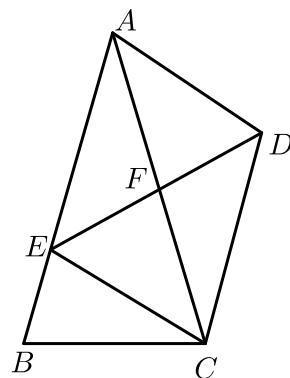
$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】平行四边形的判定及应用

【知识点】平行四边形性质综合应用

24. 如图 , 在四边形 $ABCD$ 中 , $AB \parallel CD$, 过点 C 作 $CE \parallel AD$ 交 AB 于 E , 连接 AC 、 DE , AC 与 DE 交于点 F .



(1) 求证：四边形 $AECD$ 为平行四边形 .

(2) 如果 $EF = 2\sqrt{2}$, $\angle FCD = 30^\circ$, $\angle FDC = 45^\circ$, 求 DC 的长 .

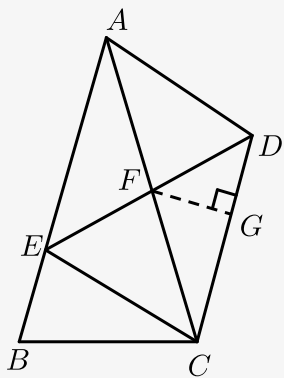
【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) $CD = 2\sqrt{3} + 2$.

【解析】 (1) $\because AB \parallel CD$, $CE \parallel AD$,

$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形 .

(2) 如图 , 过点 F 作 $FG \perp CD$ 于 G .



$\because$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形 ,

$\therefore FD = EF = 2\sqrt{2}$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle FGD$ 中 , $\angle FGD = 90^\circ$, $\angle FDC = 45^\circ$, $FD = 2\sqrt{2}$,

$\therefore \cos \angle FDG = \frac{DG}{FD}$,

$\therefore DG = FG = FD \cos \angle FDG = 2\sqrt{2} \times \cos 45^\circ = 2$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle FGC$ 中 , $\angle FGC = 90^\circ$, $\angle FCD = 30^\circ$, $FG = 2$,

$\therefore \tan \angle FCG = \frac{FG}{CG}$,

$\therefore CG = \frac{FG}{\tan \angle FCD} = \frac{2}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}$.

$\therefore CD = CG + GD = 2\sqrt{3} + 2$.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】平行四边形的判定及应用

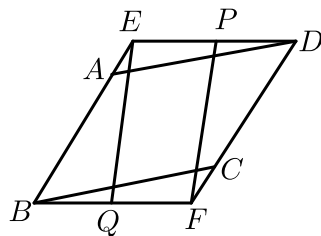
【知识点】探究特殊角的三角函数值

【知识点】解直角三角形的综合应用

【重点强调】

2018~2019学年3月天津南开区天津市第二十五中学初二下学期月考第23题

25. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别在边 BA 、 DC 的延长线上，已知 $AE = CF$ ， P 、 Q 分别是 DE 和 FB 的中点．求证：四边形 $EQFP$ 是平行四边形．



【答案】证明见解析．

【解析】在平行四边形 $ABCD$ 中， $AD = BC$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = \angle ADC$ ，
 $\therefore AD \parallel BC$ ，
 $\therefore \angle ABC = \angle EAD$ ， $\angle BCF = \angle ADC$ ，
 $\therefore \angle EAD = \angle BCF$ ，
又 $\because AE = CF$ ，
 $\therefore \triangle EAD \cong \triangle FCB$ (SAS)，
 $\therefore ED = FB$ ， $\angle CBF = \angle EDA$ ， $\angle CFB = \angle AED$ ，
 $\therefore \angle CBF + \angle ABC = \angle EDA + \angle ADC$ ，即 $\angle ABF = \angle EDF$ ，
 $\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是平行四边形，
 $\therefore ED \parallel FB$ ， $ED = FB$ ，
 $\therefore P$ 、 Q 分别是 DE 和 FB 的中点，
 $\therefore PE = QF$ ．
又 $\because PE \parallel QF$ ，
 $\therefore$ 四边形 $EQFP$ 是平行四边形．

【标注】【知识点】平行四边形与全等综合

【重点强调】

2017~2018学年3月天津南开区天津市南开翔宇学校初二下学期月考第23题

三、中位线的应用

三角形中位线

中位线定义：连接三角形两边_____的线段叫做三角形的中位线.

中位线定理：三角形的中位线_____于三角形的第三边，并且等于第三边的_____。
书写：

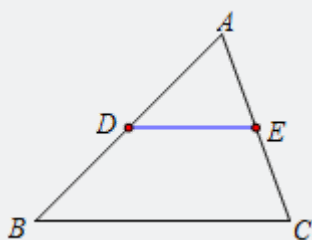
【教法备注】

1、三角形中位线定义：

连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线.

2、三角形中位线定理：

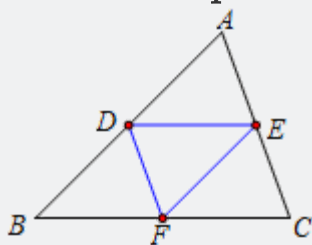
三角形的中位线平行于三角形的第三边，并且等于第三边的一半.



如上图， $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}BC$.

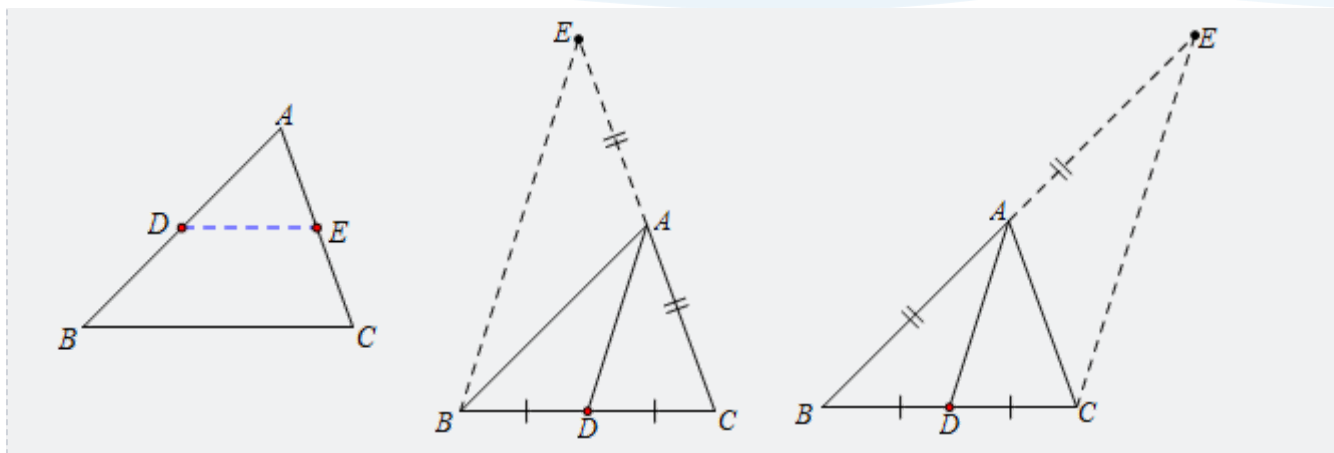
拓展：

三角形有三条中位线，三条中位线把原三角形分成可重合的4个小三角形，每个小三角形的周长为原三角形周长的 $\frac{1}{2}$ ，每个小三角形的面积为原三角形面积的 $\frac{1}{4}$.



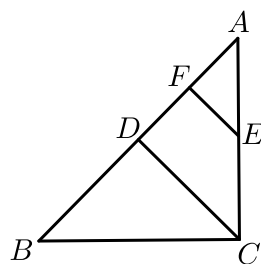
总结：

- ①三角形的中位线与第三边都有相应的位置关系和数量关系，位置关系可以证明两条直线平行，数量关系可以证明线段的倍分关系 .
- ②当已知条件中的中点较多，要联想“三角形的中位线”，不是中位线的，可以通过辅助线构造 .



例题

26. 如图所示，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ，点 D 是 AB 的中点， AC 的中点为 E ， AD 的中点为 F ，连接 EF ，则 $EF =$ _____ 。



【答案】 1.5

【解析】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ，点 D 是 AB 的中点，

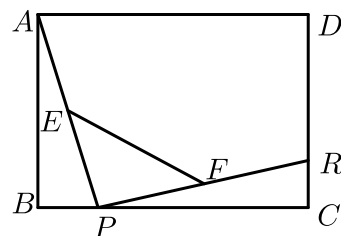
$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB = 3.$$

$\because EF$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2} CD = 1.5.$$

【标注】 【知识点】 中位线定理及其应用

27. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， R 为 CD 上一定点， P 为 BC 上一动点， E 、 F 分别是 AP 、 RP 的中点，当 P 从 B 向 C 移动时，线段 EF 的长度（ ）。



- A. 逐渐变小 B. 逐渐变大 C. 不变 D. 无法确定

【答案】C

【解析】 $\because E、F$ 分别是 $AP、RP$ 的中点，

$\therefore EF$ 是 $\triangle APR$ 的中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AR,$$

$\because$ 点 $A、R$ 不动，

$\therefore AR$ 的长度一定，

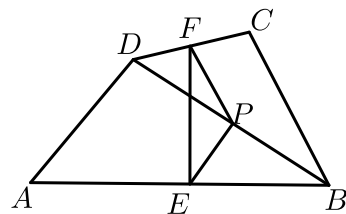
$\therefore EF$ 的长度不变，

故选C.

【标注】【知识点】中位线定理及其应用

练习

28. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， P 是对角线 BD 的中点， $E、F$ 分别是 $AB、CD$ 的中点， $AD = BC$ ， $\angle FPE = 100^\circ$ ，则 $\angle PFE$ 的度数是 _____ .



【答案】 40°

【解析】 $\because P$ 是对角线 BD 的中点， E 是 AB 的中点，

$$\therefore EP = \frac{1}{2}AD,$$

$$\text{同理, } FP = \frac{1}{2}BC,$$

$\because AD = BC,$

$$\therefore PE = PF,$$

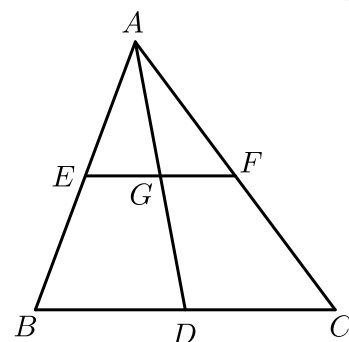
$$\because \angle FPE = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle PFE = 40^\circ,$$

故答案为： 40° .

【标注】【知识点】三角形中位线定理

29. 如图， $\triangle ABC$ 的中位线 EF 交中线 AD 于 G ，则 $\triangle AGE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 _____ .

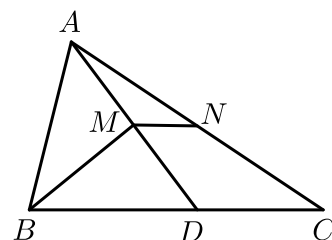


【答案】 $\frac{1}{8}$

【解析】 略

【标注】 【知识点】 中位线定理及其应用

30. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 BC 上， $BD = AB$ ， $BM \perp AD$ 于点 M ， N 是 AC 的中点，连接 MN ，若 $AB = 5$ ， $BC = 8$ ，则 MN 的长为（ ）。



A. 6

B. 3

C. 1.5

D. 1

【答案】 C

【解析】 $\because BD = AB$ ， $BM \perp AD$ 于点 M ，

$$\therefore AM = DM .$$

$\because N$ 是 AC 的中点，

$$\therefore AN = CN .$$

$\therefore MN$ 是三角形 ADC 的中位线，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}DC .$$

$$\because AB = 5 , BC = 8 ,$$

$$\therefore DC = 3 .$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}DC = 1.5 .$$

【标注】 【知识点】 中位线定理及其应用

